位相群のΠ_n空間へのUnitary表現の特性関数について (群の表現と調和解析)

酒井, 幸吉

数理解析研究所講究録
368巻 1979年 224-240

位相群のΠ_n空間へのUnitary表現の特性関数について

鹿児島大学教養部　酒井幸吉

任意の位相群G上にQuasi-positive definite関数及びQuasi-negative definite関数を導入し，これらの関数とGのΠ_n空間へのCyclic unitary表現の特性関数との関連についてのべる．

はじめに本文中で断りなく使用する記号を宣言しておく．Gの単位元はe，一般の元はg又はhで表わす．G上の連続関数全体の集合をC(G)とする．$\varphi(g)\in C(G)$に対して，$\varphi^*(g)$は$\varphi^*(g)=\overline{\varphi(g^{-1})}$はよってきまる関数．線形空間の部分集合Aが生成する線形部分空間を$ls\{A\}$と略記する．$\mathbb{C}$，$\mathbb{R}$はそれぞれ複素数体，実数体を表わす．nはいつも任意に固定されたnon-negative integerとする．

§1　GのΠ_n空間へのCyclic unitary表現

まずΠ_n空間の定義からはじめる．いま非退化Hermitian sesqui-linear form $\langle\,,\,\rangle$をもつ線形空間$\mathfrak{H}$にて，これの極大負定値部

分空間($\langle,\rangle$ に関する)の次元が n のとき，$\{\mathfrak{H},\langle,\rangle\}$ は pre Π_n 空間であるという．この空間の極大負定値部分空間を $\mathfrak{N}$（次元は n），その直交補空間 $\mathfrak{N}^\perp$ を $\mathfrak{P}$ とすると，$\mathfrak{P}$ は正定値部分空間となり $\mathfrak{H}$ は $\mathfrak{N}$ と $\mathfrak{P}$ の直交直和に分解できる：

(1) $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}(+)\mathfrak{P}$ （$\mathfrak{H}$ の基本分解という).

$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ への射影作用素をそれぞれ N, P とし，$J=P-N$ とおくと，基本分解(1)に対応して $\mathfrak{H}$ に正定値内積 $(\ ,\ )_J$ が

(2) $(x,y)_J=\langle Jx,y\rangle$ （$x,y\in\mathfrak{H}$）

で定義できる．$\mathfrak{H}$ には $(\ ,\ )_J$ より定まるノルムによって位相を与える．いま $\{\mathfrak{H},(\ ,\ )_J\}$ が Hilbert 空間になるとき，$\{\mathfrak{H},\langle,\rangle\}$ は Π_n 空間（Pontrjagin space with negative rank n）という．なお Π_0 空間は Hilbert 空間と考えてよい．任意の pre Π_n 空間は完備化によって，Π_n 空間の中に至る所稠密に埋め込むことができる．[2], [4] に Π_n 空間についての詳しい解説がある．

さて (pre) Π_n 空間 $\mathfrak{H}$ 上の線形作用 T が全単射で $\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle$ ($x,y\in\mathfrak{H}$) をみたすとき unitary 作用素であるという．G の (pre) Π_n 空間 $\mathfrak{H}$ への unitary 表現 $\{U_g,\mathfrak{H}\}$ とは，G から $\mathfrak{H}$ 上の unitary 作用素群への準同型 $g\mapsto U_g$ で任意の $x,y\in\mathfrak{H}$ によって定まる G 上の関数 $\langle U_gx,y\rangle$ が連続であるものをいう．この表現 $\{U_g,\mathfrak{H}\}$ を単に一つの文字 U で表わし，その表現空間 $\mathfrak{H}$ を $\mathfrak{H}^U$ とかくことにする．G の Π_n 空間への unitary 表現全体の集合

を $\mathbb{U}_n(G)$ とする. $U\in\mathbb{U}_n(G)$ とし, $f\in\mathfrak{H}^U$ が $\{U_g f : g\in G\}^{\perp}=\{0\}$ をみたすとき, f は U-cyclic であるといい, この様な vector の集合を $cv(U)$ とかく. $cv(U)\neq\phi$ (empty) のとき U は cyclic であるという. $\mathbb{U}_n(G)$ の要素で cyclic なものの全体を $\mathbb{CU}_n(G)$ で表わす. いま $U\in\mathbb{CU}_n(G)$, $f\in cv(U)$ に対して, 関数 $\varphi(g)=\langle U_g f, f\rangle\in C(G)$ を U の f によって定まる特性関数と呼ぶ. Hilbert 空間への cyclic unitary 表現の場合と同様に次の定理が成立する (cf. [8]).

定理 1　$U^j\in\mathbb{CU}_n(G)$ の $f_j\in cv(U^j)$ によって定まる特性関数を φ_j $(j=1,2)$ とする. $\varphi_1=\varphi_2$ ならば, $\mathfrak{H}^{U^1}$ から $\mathfrak{H}^{U^2}$ 上への isometric 同型 T で $U_g^2 T = T U_g^1$ かつ $Tf_1=f_2$ なるものが存在する. ▨

Π_n 空間 $\mathfrak{H}$ 上の unitary 作用素 T は, Hilbert 空間 $\{\mathfrak{H}, (\ ,\ )_J\}$ (cf. (2)) 上の有界作用素になり, そのノルムを $\|T\|_J$ とかく. 一般に $U\in\mathbb{U}_n(G)$ は一様有界 (i.e. $\sup_{g\in G}\|U_g\|_J<\infty$) ではない. このことに関連して次の定理が成立する (cf. [8]).

定理 2　$U\in\mathbb{CU}_n(G)$ が一様有界であるための条件は U が有界な特性関数をもつことである. ▨

注意 1　$U\in\mathbb{U}_n(G)$ とし, $\mathfrak{H}^U$ は n 次元 U-不変負定値部分空間 $\mathfrak{N}$ をもつとする. このとき $\mathfrak{P}=\mathfrak{N}^{\perp}$ も U-不変であり, $\mathfrak{H}^U$ の基本分解 $\mathfrak{H}^U=\mathfrak{N}(+)\mathfrak{P}$ に対応して定まる正定値内積を $(\ ,\ )_J$ (cf. (2)) とすると, U は Hilbert 空間 $\{\mathfrak{H}^U, (\ ,\ )_J\}$ への unitary 表現とみなすことができる. 故にこの様な U は一様有界になる.

一方 G が amenable のとき，$U \in \mathfrak{U}_n(G)$ が一様有界ならば，$\mathfrak{H}^U$ は必ず n 次 U-不変負定値部分空間をもつ (cf. [7])．▨

§2 Hermitian kernels of finite negative rank

Π_n 空間への cyclic unitary 表現の特性関数を特徴づけるため，標記にあるものを導入する．いま任意の Hermite 行列 H に対して，その負の固有値の個数を $r_-(H)$ で表わすことにする．

<u>定義 1</u>　$G \times G$ 上の連続関数 $K(g,h)$ が次の性質 (a), (b) をもつとき Hermitian kernel of negative rank n であるという：

(a)　$\overline{K(g,h)} = K(h,g)$

(b)　任意の有限個の元 $g_i \in G$ $(1 \le i \le m)$ によって定まる Hermit 行列 $K[g_1, g_2, \cdots, g_m] := (K(g_i, g_j))$ に対して

$$r_-(K[g_1, g_2, \cdots, g_m]) \le n \qquad \cdots (*)$$

であり，しかも (*) にて等号が成立することがある．

この様な $K(g,h)$ の集合を $HK_n(G)$ とかく．▨

いま $K(g,h) \in HK_n(G)$ を任意に与える．$h \in G$ を固定してえられる関数 $g \mapsto K(h,g)$ と K_h とかき，$C(G)$ の部分空間 $ls\{K_h : h \in G\}$ を $\mathfrak{H}[K]$ とする．$\mathfrak{H}[K]$ の元 $f_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_{g_i}$，$f_2 = \sum_{j=1}^{q} \mu_j K_{h_j}$ $(\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C})$ に対して，$\langle f_1, f_2 \rangle_K = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \overline{\mu}_j K(g_i, h_j)$ とおくと，$\langle\ ,\ \rangle_K$ は $\mathfrak{H}[K]$ 上の非退化 Hermitian sesqui-linear form になる．特に次が成立する：

(3) $\langle K_g, K_h \rangle_K = K(g,h)$.

更に次の補題が成立する.

<u>補題 1</u>　$\{\mathfrak{H}[K], \langle\ ,\ \rangle_K\}$ は pre Π_n 空間である．この完備化を $\{\mathfrak{H}(K), \langle\ ,\ \rangle_K\}$ とすると，写像 $G \ni g \mapsto K_g \in \mathfrak{H}(K)$ は弱連続 (i.e. 任意の $x \in \mathfrak{H}(K)$ に対して G 上の関数 $g \mapsto \langle K_g, x \rangle_K$ は連続) である. ▨

逆に次も成立する.

<u>補題 2</u>　G から Π_n 空間 $\mathfrak{H}$ への写像 $g \mapsto \eta(g)$ に対して，$G \times G$ 上の関数 $K(g,h) := \langle \eta(g), \eta(h) \rangle$ は連続であるとする．$\mathfrak{H}$ の部分空間 $ls\{\eta(g) : g \in G\}$ に含まれる極大負定値部分空間の次元を m $(m \leq n)$ とすると $K(g,h) \in HK_m(G)$ である．特に $\{\eta(g) : g \in G\}^{\perp} = \{0\}$ ならば $K(g,h) \in HK_n(G)$ になる． ▨

§3　Quasi-positive definite 関数

<u>定義 2</u>　$\varphi(g) \in C(G)$ に対して，$G \times G$ 上の関数 $K(g,h) = \varphi(h^{-1}g)$ が $HK_n(G)$ に属するとき，$\varphi(g)$ は Quasi-positive definite function of rank n であるという．この様な関数全体の集合を $P_n(G)$ で表わすことにする． ▨

$P_0(G)$ は G 上の連続な positive definite 関数の集合に外ならない．いま $U \in \mathbb{C}U_n(G)$ の $f \in cv(U)$ によって定まる特性関数を $\varphi_f(g)$ とすると，補題 2 より $K(g,h) = \varphi_f(h^{-1}g) = \langle U_g f, U_h f \rangle \in HK_n(G)$. すなわち，$\varphi_f(g) \in P_n(G)$ である.

一方 $\varphi(g)\in P_n(G)$ を任意に与え，$K(g,h):=\varphi(h^{-1}g)\in HK_n(G)$ とする．このとき $K_{g_0}(g^{-1}h)=K_{gg_0}(h)$，$K(gg_1,gg_2)=K(g_1,g_2)$ なる関係が成立するから，pre Π_n 空間 $\mathfrak{H}[K]$ への G の unitary 表現 $g\to U_g'$ を

$U_g'f(h)=f(g^{-1}h)$ $(f\in\mathfrak{H}[K])$ によって定義できる．この表現 U' の Π_n 空間 $\mathfrak{H}(K)$ (cf. 補題 1) 上への拡張を U とすると，これは cyclic になる．実際 $f_0=K_e$ とすると，$U_g f_0=K_g$ だから $\mathfrak{H}(K)$ の作り方より，f_0 は U-cyclic である．しかも U の f_0 によって定まる特性関数は $\varphi(g)$ になる：

$$\langle U_g f_0, f_0\rangle_K=\langle K_g, K_e\rangle_K\overset{(3)}{=}K(g,e)=\varphi(g).$$

すなわち $\varphi(g)$ を特性関数にもつ $U\in CU_n(G)$ が存在する．更に定理 1 より，この様な U は unitary 同値なものを除き一意的にきまる．これを $U(\varphi)$ とかくことにする．以上まとめて

<u>定理 3</u>　$\varphi(g)\in P_n(G)\iff U(\varphi)\in CU_n(G)$ 及び $f\in cv(U(\varphi))$ が存在して $\varphi(g)$ は $\varphi(g)=\langle U(\varphi)_g f, f\rangle$ と表わされる．

しかも任意の $\varphi(g)\in P_n(G)$ に対して，上の $U(\varphi)$ は unitary 同値なものを除き一意的にきまる． ▨

<u>注意 2</u>　(A)　$\varphi_j(g)\in P_{n_j}(G)$ $(i=1,2)$ とすると，適当な整数 m $(0\le m\le n_1+n_2)$ が存在して，和 $\varphi(g)=\varphi_1(g)+\varphi_2(g)$ は $P_m(G)$ に属す．

(B)　一般に $U\in U_n(G)$，$f\in\mathfrak{H}^U$ に対して，$\varphi(g)=\langle U_g f, f\rangle\in P_m(G)$．ここで $m\ (\le n)$ は $\mathfrak{H}^U$ の部分空間 $ls\{U_g f : g\in G\}$ に含まれる極大負定値部分空間の次元に等しい． ▨

任意の $\mathrm{U}\in\mathbb{U}_n(G)$ に対して $\mathcal{E}(\mathrm{U}):=\{x\in\mathfrak{H}^{\mathrm{U}}:\ \mathrm{U}_g x=x\ (\forall g\in G)\}$ とおと，Uがcyclic ならば $\mathcal{E}(\mathrm{U})$は高々1次元である．このことに注意して $\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}(G)$ の次の様ないくつかの部分集合を定義する:

$$\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}})=\{\mathrm{U}\in\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}(G):\mathcal{E}(\mathrm{U})=\{0\}\},$$

$$\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}(G)\setminus\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}}).$$

$\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ に属するUで，$\mathcal{E}(\mathrm{U})$が non-positive, negative definite, neutral になるものの全体をそれぞれ $\mathbb{C}\mathbb{U}^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathbb{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathbb{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ で表わす．更に $\mathbb{C}\mathbb{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ を次の二つに分ける:

$$\mathbb{C}\mathbb{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\{\mathrm{U}\in\mathbb{C}\mathbb{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E}):\ \mathfrak{H}^{\mathrm{U}}\text{は}\ \mathcal{E}(\mathrm{U})\ \text{を含むU不変な2次元}\Pi_1\text{部分空間をもつ}\},$$

$$\mathbb{C}\mathbb{U}^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\mathbb{C}\mathbb{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\setminus\mathbb{C}\mathbb{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E}).$$

従って $\mathbb{C}\mathbb{U}^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\mathbb{C}\mathbb{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\cup\mathbb{C}\mathbb{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ (disjoint union)

$$=\mathbb{C}\mathbb{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\cup\mathbb{C}\mathbb{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\cup\mathbb{C}\mathbb{U}^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\ \text{(disjoint union)}.$$

上に定義した $\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}(G)$ の各部分集合に対応して，$P_{n+1}(G)$ の部分集合 $P_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}})$, $P_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ は，$\varphi(g)\in P_{n+1}(G)$ で $\mathrm{U}(\varphi)$ がそれぞれ $\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}})$, $\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathbb{U}^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathbb{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathbb{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathbb{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathbb{U}^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ に属するものの全体とする．

またG上の non-zero real character (i.e. G上の実数値関数 $r(g)\in C(G)$, $r(g)\neq 0$ で $r(gh)=r(g)+r(h)$ をみたすもの)の集合を $A(G)$ とする．以上の記号のもとに次の二つの補題が成立する．

<u>補題 3</u>　$\mathbb{U}\in\mathbb{CU}^{(-)}_{n+1}(G,\varepsilon)\Leftrightarrow\mathbb{U}=\mathbb{V}\,(+)\,\varepsilon^-$ なる形に分解できる．ただし $\mathbb{V}\in\mathbb{CU}_n(G,\check{\varepsilon})$，$\varepsilon^-\in\mathbb{CU}_1(G,\varepsilon)$ は 1 次元 Π_1 空間への trivial 表現である．この様な $\mathbb{U}$ に対して

$$cv(\mathbb{U})=\{x+\omega:\ x\in\mathfrak{H}^{\varepsilon^-},x\neq 0,\ \omega\in cv(\mathbb{V})\}.$$ ▨

<u>補題 4</u>　$\mathbb{U}\in\mathbb{CU}^{(+0)}_{n+1}(G,\varepsilon)\Leftrightarrow\mathbb{U}=\mathbb{V}\,(+)\,\mathbb{W}$ なる形に分解できる．ただし $\mathbb{V}\in\mathbb{CU}_n(G,\check{\varepsilon})$，$\mathbb{W}$ は $r(g)\in A(G)$ を用いて次の様に定義される：　$\mathbb{W}_g\xi=\xi$，$\mathbb{W}_g\eta=\sqrt{-1}\,r(g)\xi+\eta$．　ここで $\{\xi,\eta\}$ は $\mathfrak{H}^{\mathbb{W}}$ (= 2 次元 Π_1 空間) のベースで $\langle\xi,\xi\rangle=\langle\eta,\eta\rangle=0$，$\langle\xi,\eta\rangle=1$ をみたすものである．この様な $\mathbb{U}$ に対して

$$cv(\mathbb{U})=\{\alpha\xi+\beta\eta+\omega:\ \alpha,\beta\in\mathbb{C},\alpha\beta\neq 0,\ \omega\in cv(\mathbb{V})\}$$ ▨

上の二つの補題と定理 3 より次の結果をえる．

<u>定理 4</u>　$P^{(-)}_{n+1}(G,\varepsilon)=\{p(g)-c:\ p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon}),\ c\in\mathbb{R},\ c>0\}$

$P^{(+0)}_{n+1}(G,\varepsilon)=\{\sqrt{-1}\,r(g)+p(g)+c:\ r(g)\in A(G),\ p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon}),\ c\in\mathbb{R}\}$ ▨

<u>注意 3</u>　$p_i(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon})$，$r_i(g)\in A(G)$，$c_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2)$ とする．もし $p_1(g)+c_1=p_2(g)+c_2$ ならば，$p_1(g)=p_2(g)$，$c_1=c_2$ である．実際 $c=c_1-c_2>0$ と仮定すると，定理 4 より $p_1(g)=p_2(g)-c$ は $P^{(-)}_{n+1}(G,\varepsilon)$ に属する．これは矛盾である ($\because P_n(G)\cap P_{n+1}(G)=\phi$)．従って $p_1(g)=p_2(g)$，$c_1=c_2$ である．同様に，$\sqrt{-1}\,r_1(g)+p_1(g)+c_1=\sqrt{-1}\,r_2(g)+p_2(g)+c_2$ ならば，$r_1(g)=r_2(g)$，$p_1(g)=p_2(g)$，$c_1=c_2$ であることが結論できる． ▨

§4 Quasi-negative definite 関数

$P_{n+1}^{N}(G,\varepsilon)$ に属する関数を統一的に特徴づけるために標記のものを導入する。$\varphi(g)\in C(G)$ に対して $G\times G$ 上の関数 $K^{\varphi}(g,h)$ を

$$(4)\qquad K^{\varphi}(g,h)=\varphi(h^{-1}g)-\varphi(g)-\overline{\varphi(h)}$$

によって定めることにする。

<u>定義 3</u> $\varphi(g)\in C(G)$ が $\varphi(e)=0$ かつ $K^{\varphi}(g,h)\in HK_n(G)$ のとき Quasi-negative definite function of rank n であるという。この様な関数の集合を $N_n(G)$ とかく。 ▨

$\varphi(g)\in N_n(G)$ ならば $\varphi^{*}(g)=\varphi(g)$ である。なお $N_0(G)$ は negative definite (or conditional positive definite) 関数と呼ばれるもののうち e で zero となるものの集合である (cf. [1], [3])。

<u>注意 4</u> $\varphi(g)=\sqrt{-1}\,r(g)$ $(r(g)\in A(G))$ とおくと $K^{\varphi}=0$ となるから、$\varphi(g)\in N_0(G)$ である。逆に $\varphi(g)\in N_0(G)$, $\varphi(g)\neq 0$, $K^{\varphi}=0$ ならば、$\varphi(g)$ は $\sqrt{-1}\,r(g)$ $(r(g)\in A(G))$ なる形である。 ▨

任意の $V\in \mathbb{V}_n(G)$ に対して、これの弱連続 1-cocycle (i.e. G から $\mathfrak{H}^{V}$ への弱連続写像 $g\mapsto \eta(g)$ で $\eta(hg)=V_h\eta(g)+\eta(h)$ をみたすもの) の全体を $Z^1(G,V)$ とし、$B^1(G,V)=\{\partial v(g)=V_g v-v : v\in\mathfrak{H}^{V}\}(\subseteq Z^1(G,V))$ とおく。更に

$$Z^1_t(G,V):=\{\eta(g)\in Z^1(G,V):\{\eta(g):g\in G\}^{\perp}=\{0\}\},$$

$$B^1_t(G,V):=B^1(G,V)\cap Z^1_t(G,V).$$

$N_n(G)$ と $\mathbb{V}_n(G)$ は次の定理によって関連づけることができる。

定理 5　$\varphi(g)\in C(G)$ に対して $K^{\varphi}\neq 0$ とする．このとき $\varphi(g)\in N_n(G)$ であるための条件は $V\in\mathbb{U}_n(G)$ 及び $\eta(g)\in Z^1_t(G,V)$ が存在して次の関係(5)が成立することである：

$$(5)\qquad \langle\eta(g),\eta(h)\rangle=\varphi(h^{-1}g)-\varphi(g)-\overline{\varphi(h)}\ (=K^{\varphi}(g,h)).$$ ▨

十分性は $\eta(e)=0$ なることと補題2より明らか．逆に $\varphi(g)\in N_n(G)$，$K^{\varphi}\neq 0$ とすると，次の関係が成立する(cf. §2)：

$$(6)\qquad K^{\varphi}_{g_0}(g^{-1}h)-K^{\varphi}_{g_0}(g^{-1})=K^{\varphi}_{gg_0}(h)-K^{\varphi}_{g}(h)$$

この関係より pre Π_n 空間 $\mathfrak{H}[K^{\varphi}]$ への G の unitary 表現 $g\to V'_g$ を

$$V'_g f(h)=f(g^{-1}h)-f(g^{-1})\quad (f\in\mathfrak{H}[K^{\varphi}])$$

と定義できる．この表現 V' の Π_n 空間 $\mathfrak{H}(K^{\varphi})$ への拡張を V とする．更に $G\ni g\mapsto\eta(g)\doteq K^{\varphi}_g\in\mathfrak{H}(K^{\varphi})$ によって $\eta(g)$ をきめると，(6)及び補題1より $\eta(g)\in Z^1_t(G,V)$ なることが判る．しかも(3),(4)から(5)が従う．よって定理5の必要性が判る．

注意 5　(A)　$\varphi(g)\in N_n(G)$ に対して，(5)をみたす $V\in\mathbb{U}_n(G)$ 及び $\eta(g)\in Z^1_t(G,V)$ は unitary 同値なものを除き一意的にきまる(cf. [9])．この $V,\eta(g)$ を $V^{\varphi},\eta_{\varphi}(g)$ で表わすことにする．

(B)　$V\in\mathbb{U}_n(G)$ とする．$\eta(g)\in Z^1_t(G,V)$ を任意に与えたとき，(5)をみたす $\varphi(g)\in C(G)$ が存在するかどうかは明らかではない．もし実数値連続関数 $\psi(g)$ で

$$\mathrm{Im}\langle\eta(h),V_h\eta(g)\rangle=\psi(hg)-\psi(g)-\psi(h)$$

をみたすものがあれば，$\varphi(g)=\sqrt{-1}\,\psi(g)-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\langle\eta(g),\eta(g)\rangle$

は (5) をみたす (cf. [9]). ▨

$\varphi(g) \in N_n(G)$ に対応する $\eta_\varphi(g) \in Z_t^1(G, V^\varphi)$ に着目して, $N_n(G)$ を次の二つに分ける:

$$N_n^{(B)}(G) = \{ \varphi(g) \in N_n(G) : \eta_\varphi(g) \in B_t^1(G, V^\varphi) \},$$

$$N_n^{(Z)}(G) = N_n(G) \setminus N_n^{(B)}(G),$$

ただし $n=0$ の場合 $\sqrt{-1}\,A(G) \subset N_0^{(B)}(G)$ と考える (cf. 注意4).

$N_n^{(B)}(G)$ に属する関数の形を知るため, 次の二つの補題あげる.

<u>補題 5</u> $V \in \mathbb{U}_n(G)$, $\partial v(g) \in B^1(G, V)$ とし, $p(g) = \langle V_g v, v \rangle$ とおく. このとき $\eta(g) = \partial v(g)$ に対して (5) をたす $\varphi(g)$ は存在し, 次の形で与えられる:

$$\varphi(g) = \sqrt{-1}\, r(g) + p(g) - p(e),$$

ただし $r(g) = 0$ 又は $r(g) \in A(G)$ である. ▨

<u>補題 6</u> $V \in \mathbb{U}_n(G)$, $\eta(g) = \partial v(g) \in B^1(G, V)$ とすると,

$\eta(g) \in B_t^1(G, V) \Leftrightarrow V \in \mathbb{C}\mathbb{U}_n(G, \check{\varepsilon})$ かつ $v \in c v(V)$. ▨

これらの補題及び注意3より次の結果をえる.

<u>定理 6</u> $\varphi(g) \in N_n^{(B)}(G) \Leftrightarrow \varphi(g)$ は次の (7) 又は (8) で表わされる:

(7) $\varphi(g) = p(g) - p(e)$, $(p(g) \in P_n(G, \check{\varepsilon}))$,

(8) $\varphi(g) = \sqrt{-1}\, r(g) + p(g) - p(e)$, $(r(g) \in A(G),\ p(g) \in P_n(G, \check{\varepsilon}))$.

(7), (8) の右辺にある $p(g)$, $r(g)$ は $\varphi(g)$ により一意的にきまる. ▨

次の§での記述を簡単にするため, (7), (8) で与えられる関数 $\varphi(g)$ の集合をそれぞれ $N_n^{(-)}(G)$, $N_n^{(+0)}(G)$ とかく. 従って

$$N_n(G) = N_n^{(-)}(G) \cup N_n^{(+0)}(G) \cup N_n^{(z)}(G) \quad (\text{disjoint union}).$$

注意 6　$n=0$ の場合 $N_0^{(-)}(G)$, $N_0^{(+0)}(G)$, $N_n^{(z)}(G)$ は次の様に特徴づけることもできる (cf. [9]). いま $\varphi(g) \in N_0(G)$ とすると,

$\varphi(g) \in N_0^{(-)}(G) \Leftrightarrow \varphi(g)$ は有界,

$\varphi(g) \in N_0^{(+0)}(G) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\varphi(g)$ は有界, $\mathrm{Im}\,\varphi(g)$ は非有界,

$\varphi(g) \in N_0^{(z)}(G) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\varphi(g)$ は非有界. ▨

§5　$N_n(G)$, $\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}^N(G,\mathcal{E})$ 及び $P_{n+1}^N(G,\mathcal{E})$ の関係

いま $\mathbb{U} \in \mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}^{(0)}(G,\mathcal{E})$ (cf. §3), $\eta \in CU(\mathbb{U})$ とする. このとき neutral vector $\xi \in \mathcal{E}(\mathbb{U})$ を $\langle \xi, \eta \rangle = 1$ をみたすように選ぶ. $\mathfrak{H}(\xi,\eta : c) := ls\{\xi,\eta\}$ (ただし $c = \langle \eta,\eta \rangle$) とおくと, これは Π_1 部分空間であり, $\mathfrak{H}^{\mathbb{U}}$ を $\mathfrak{H}^{\mathbb{U}} = \mathfrak{H}(\xi,\eta : c) \dotplus \mathfrak{H}_0$ ($\mathfrak{H}_0 = \Pi_n$ 部分空間) と分解しておく. この分解に対応して, $\mathbb{U}$ は次の様に表わすことができる:

$$\mathbb{U}_g \xi = \xi$$

$$\mathbb{U}_g w = \langle \mathbb{U}_g w, \eta \rangle \xi + \mathbb{V}_g w = \langle w, \eta(g^{-1}) \rangle \xi + \mathbb{V}_g w, \quad (w \in \mathfrak{H}_0)$$

$$\mathbb{U}_g \eta = \varphi(g)\xi + \eta + \eta(g).$$

ここで $\{\mathbb{V}_g, \mathfrak{H}_0\} \in \mathbb{U}_n(G)$, $\varphi(g) \in C(G)$, $\eta(g) \in Z_t^1(G,\mathbb{V})$ である. しかも $\varphi^*(g) = \varphi(g)$, $\varphi(e) = 0$ かつ次の関係が成立する:

$$\varphi(hg) = \varphi(h) + \varphi(g) + \langle \eta(g), \eta(h^{-1}) \rangle.$$

従って, 定理 5 より $\varphi(g) \in N_n(G)$ となる. 更に $\mathbb{U}$ の η によっ

て定まる特性関数は $\varphi(g)+C$ である．

一方 $\varphi(g)\in N_n(G)$ 及び $C\in\mathbb{R}$ を任意に与える．$V=V^{\varphi}\in\mathfrak{U}_n(G)$, $\eta(g)=\eta_\varphi(g)\in Z_t^1(G,V^\varphi)$ (cf. 注意 5 (A)) とおき，$\mathfrak{H}(\xi,\eta:C)$ は 2 次元 Π_1 空間で $\langle\xi,\xi\rangle=0$, $\langle\xi,\eta\rangle=1$, $\langle\eta,\eta\rangle=C$ をみたすベース $\{\xi,\eta\}$ をもつものとする．更に Π_{n+1} 空間 $\mathfrak{H}_C$ を $\mathfrak{H}_C=\mathfrak{H}(\xi,\eta:C)(+)\mathfrak{H}^V$ と定める．このとき，G の unitary 表現 $U^{(\varphi,C)}=\{U_g,\mathfrak{H}_C\}$ を

$$U_g\xi=\xi,\qquad U_g w=\langle w,\eta(g^{-1})\rangle\xi+V_g w\quad(w\in\mathfrak{H}^V),$$

$$U_g\eta=\varphi(g)\xi+\eta+\eta(g)$$

と定義できる．任意の $C\in\mathbb{R}$, $\varphi(g)\in N_n^{(+0)}(G)\cup N_n^{(z)}(G)$ に対して，$U^{(\varphi,C)}$ は cyclic であり，$\eta\in cv(U^{(\varphi,C)})$ となる．すなわち，この場合 $U^{(\varphi,C)}\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}^{(0)}(G,\varepsilon)$ である．しかも $U^{(\varphi,C)}$ の η によって定まる特性関数は $\varphi(g)+C$ となる．

より詳しく次の定理が成立する (cf [9. §§6-7])．

<u>定理 7</u> $\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}^{(+0)}(G,\varepsilon)=\{U^{(\varphi,C)}:\varphi(g)\in N_n^{(+0)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$,

$\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}^{(z)}(G,\varepsilon)=\{U^{(\varphi,C)}:\varphi(g)\in N_n^{(z)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$. ▨

<u>定理 8</u> $P_{n+1}^{(+0)}(G,\varepsilon)=\{\varphi(g)+C:\varphi(g)\in N_n^{(+0)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$,

$P_{n+1}^{(z)}(G,\varepsilon)=\{\varphi(g)+C:\varphi(g)\in N_n^{(z)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$.

特に $N_n^{(+0)}(G)\subset P_{n+1}^{(+0)}(G,\varepsilon)$, $N_n^{(z)}(G)\subset P_{n+1}^{(z)}(G,\varepsilon)$. ▨

<u>注意 7</u> $\varphi(g)\in N_n^{(-)}(G)$ の場合，任意の $C\in\mathbb{R}$ に対して $U^{(\varphi,C)}$ は $U^{(\varphi,C)}=V(+)\varepsilon^+$ と分解できる．ただし $V\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}^{(-)}(G,\varepsilon)$, ε^+ は 1 次元 Π_0 空間への G の trival 表現である．従って $\varepsilon(U^{(\varphi,C)})$

は2次元となり，$U^{(\varphi,C)}$ は cyclic ではない． ▨

上の注意にもかかわらず，$P_{n+1}^{(-)}(G,\mathcal{E})$ に属する関数は $N_n^{(-)}(G)$ に属する関数を用いて表わすことができる．いま $\varphi(g)\in N_n^{(-)}(G)$ とすると，定理6より $\varphi(g)=p(g)-p(e)$, $(p(g)\in P_n(G,\check{\mathcal{E}}))$ なる形で表示され，$p(g)$ したがって $p(e)$ は $\varphi(g)$ に対して一意的にきまる．このことより $\varphi(g)\in N_n(G)$ に対して，$\mu(\varphi)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を

$$(9)\qquad \mu(\varphi)=\begin{cases} p(e) & (\varphi(g)=p(g)-p(e),\ p(g)\in P_n(G,\check{\mathcal{E}})) \\ +\infty & (\varphi(g)\in N_n(G)\setminus N_n^{(-)}(G)) \end{cases}$$

と定める．このとき定理4と(7)を比較すると次の定理をえる．

<u>定理9</u>　$P_{n+1}^{(-)}(G,\mathcal{E})=\{\varphi(g)+C:\varphi(g)\in N_n^{(-)}(G),\ C\in\mathbb{R},\ C<\mu(\varphi)\}$. ▨

<u>注意8</u>　(A)　$\varphi(g)\in N_n^{(-)}(G)$ とすると，次が成立する．

$$\mu(\varphi)>0 \Rightarrow \varphi(g)\in P_{n+1}^{(-)}(G,\mathcal{E})$$

$$\mu(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi(g)\in P_n(G,\check{\mathcal{E}})$$

$$\mu(\varphi)<0 \Rightarrow \varphi(g)\in P_n(G,\mathcal{E}).$$

(B)　定理8-9と(9)より，$N_n(G)$ と $P_{n+1}^{N}(G,\mathcal{E})$ は次で結ばれる．

$$(10)\qquad P_{n+1}^{N}(G,\mathcal{E})=\{\varphi(g)+C:\varphi(g)\in N_n(G),\ C\in\mathbb{R},\ C<\mu(\varphi)\}. \quad ▨$$

上の(10)より $\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}^{N}(G,\mathcal{E})$ に属する表現は $N_n(G)$ に属する関数によって完全にきまると考えてよい．

§6　可換群G上の $P_1(G)$

この§ではGは可換とする．Gの unitary character 群を $\hat{G}$,

G 上の連続な non-unitary character (i.e. $\chi(g)\in C(G)$ で, $\chi(gh)=\chi(g)\chi(h)$ をみたし, $\chi^*\neq\chi$ なるもの) の全体を G^* とする.

Naimark [5] によれば, 任意の $U\in\mathfrak{U}_n(G)$ に対して, $\mathfrak{H}^U$ はいつも n 次元 U-不変 non-positive 部分空間をもつ. この事実を $n=1$ の場合に適用すると, 次の補題をえる (cf. [10]).

<u>補題 7</u>　$\mathbb{C}\mathfrak{U}_1(G)$ は次の様な表現 U^1, U^2 でつくされる:

$$U^1 = \chi_1 \otimes V^1, \quad (\chi_1\in\hat{G},\ V^1\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_1^N(G,\varepsilon)),$$

$$U^2 = V^2 \dotplus W, \quad (V^2\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_0(G),\ W\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_1(G,\varepsilon)),$$

ただし W は $\chi_2\in G^*$ を用いて, $W_g\xi=\chi_2(g)\xi$, $W_g\eta=\chi_2^*(g)\eta$ と定義される. $\{\xi,\eta\}$ は $\mathfrak{H}^W$ (= 2 次元 Π_1 空間) のベースで $\langle\xi,\xi\rangle=\langle\eta,\eta\rangle=0$, $\langle\xi,\eta\rangle=1$ をみたすもの.

更に U^1, U^2 の cyclic vector は次で与えられる:

$$cv(U^1) = cv(V^1),$$

$$cv(U^2) = \{\alpha\xi+\beta\eta+w : \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \alpha\beta\neq 0,\ w\in cv(V^2)\}. \qquad \boxtimes$$

この補題と注意 8 (B) より, $P_1(G)$ に属する関数は, unitary character と negative definite 関数, 又は non-unitary character と positive definite 関数を用いて表示できる.

<u>定理 10</u>　$\varphi(g)\in P_1(G) \Longleftrightarrow \varphi(g)$ は次の (11) 又は (12) と表わされる:

(11)　$\varphi(g)=\chi(g)(\psi(g)+c)$,

ここで $\chi\in\hat{G}$, $\psi(g)\in N_0(G)$, $c\in\mathbb{R}$, $c<\mu(\psi)$.

(12)　$\varphi(g)=\lambda(\chi(g)+\chi^*(g))+\mu(\chi(g)-\chi^*(g))+p(g)$,

ここで $\chi(g)\in G^*$, $p(g)\in P_0(G)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ で $\lambda^2+\mu^2\neq 0$ なるもの. ▨

注意9 (A) 定理6, 注意6及び定理8より, (11) にある $\varphi(g)$ は次の三つの形で表示されるものに分類できる:

$$\varphi_1(g)=\chi(g)(p(g)-c_1),$$

$$\varphi_2(g)=\chi(g)(\sqrt{-1}\,r(g)+p(g)+c_2),$$

$$\varphi_3(g)=\chi(g)(\psi(g)+c_2),$$

ここで $\chi(g)\in\hat{G}$, $p(g)\in P_0(G,\check{\varepsilon})$, $r(g)\in A(G)$, $\psi(g)\in N_0(G)$ で $\mathrm{Re}\,\psi(g)$ は非有界, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$, $c_1>0$ である.

(B) G が局所コンパクトで才2可算公理をみたすとき, G 上の negative definite 関数は "Levy-Khinchin formula" によって統一的に積分表示される (cf. [3], [1]).

(C) この§のはじめにのべた Naimark の結果は, 非可換であっても, G が連結可解群 (cf [6]) 又は連結局所コンパクト amenable 群 (cf. [7]) の場合にも成立する. 従って, これらの場合にも定理10及び上の (A) は有効である. ▨

References

[1] Berg,C.: Potential theory on locally compact abelian groups, Springer, 1975.

[2] Bognár,J.: Indefinite inner product spaces, Springer, 1974.

[3] Guichardet,A.: Symmetric Hilbert spaces and related topics, Springer, Lecture Notes in Math., Vol. 261(1972).

[4] Iohvidov,I.S. et al.: Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric I, Trudy Moskov Math. Obšč., 5(1956),367-432.

[5] Naimark,M.A.: On commuting unitary operators in spaces with an indefinite metric, Acta Sci. Math., (Szeged), 24(1963),177-189.

[6] ______: Unitary representations of solvable groups in spaces with indefinite metric, Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Math., 27(1963), 1181-1185.

[7] Sakai,K.: On J-unitary representations of amenable groups, Sci. Rep. Kagoshima Univ., 26(1977),33-41.

[8] ______: On quasi-positive definite functions and unitary representations of groups in Pontrjagin spaces, J. Math. Kyoto Univ., 19(1979), 71-90.

[9] ______: On quasi-negative definite functions and certain classes of cyclic unitary representations in Π_n-spaces, Sci. Rep. Kagoshima Univ., 28(1979),9-50.

[10] ______: On indecomposable unitary representations of locally compact abelian groups in Π_n-spaces, Ibid., 27(1978),1-20.